不静定力学Ⅱ

固定法

今回から，固定法について学びます。

参考書

- 教科書
- 藤本盛久，和田章監修「建築構造力学入門」，実教育出版
- 松本慎也著「よくわかる構造力学の基本」，秀和システム

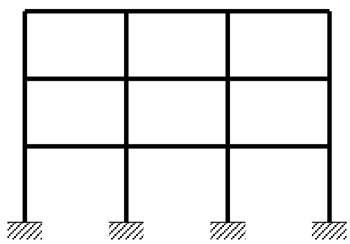
参考書として，3つ挙げておきますが，固定法に関しては松本慎也さんの書かれた本がわかりやすいと思います。

この本は，他の手法についてもわかりやすく書いてあるので，参考書としては非常に良い本です。

この授業の例題も，この本を参考にして解き方を示しています。

たわみ角法の問題点

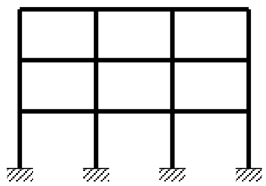
- 節点数が増えてくると，連立方程式の次数（節点方程式）が多くなって，手計算では計算が難しくなる。（→実際のビルの計算が不可能）



前回も言いましたが，たわみ角法では，図に示すようなラーメン構造の問題を解くことは実質的に不可能です。

実際のラーメン構造の解法

- マトリクス法（直接法）
  - 連立方程式をシステム的（マトリクス方程式として）に作成し，コンピュータを用いて連立方程式を解く方法
- 固定法（反復法）
  - 節点に生じるモーメント不釣合力を分配し，繰り返し計算により不釣り合い力を小さくすることで，解を求める方法



そこで，実際のラーメン構造の解法として，マトリクス法と固定法があります。

マトリクス法は，コンピュータを用いることを前提とする方法です。一般の実務ではほとんどこの方法が用いられます。

固定法は，手計算のための方法です。

パソコンがこれだけ普及すれば，手計算のための方法は必要ないのではないかと思われがちですが，力学的な原理をしっかり習得するためにはこの方法は意外に重要です。

また，1級建築士試験の問題でも，固定法を知っておくと効率よく解ける問題が出る場合があります。

固定法

- マトリクス法に比較して，手計算に向いている。
- 節点が移動しない場合には，たわみ角法に比べて計算が容易である。
- 節点が移動する問題では，固定法でも計算が複雑になるためD値法という略算法が用いられる。
- 一級建築士の試験に，固定法およびD値法の概念を用いる問題が出る場合がある。

固定法の特徴は，ここに示すとおりです。

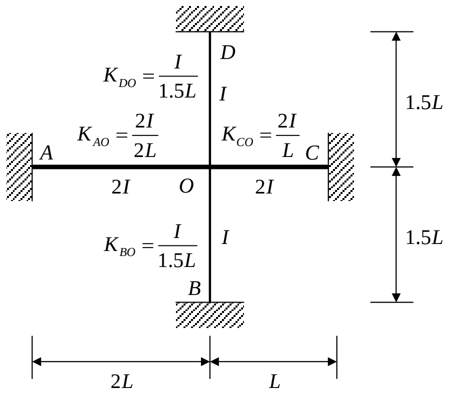
節点が移動しない場合には，この方法は非常に有効であるため，鉛直荷重（長期荷重）が作用するラーメン構造の解法としてよく使われてきた方法です。

ただし，節点移動が生じる問題では，固定法でも，たわみ角法と同様の層方程式を立てる必要があり，計算が面倒になります。

このため，水平荷重に対する手計算の解法として，D値法という方法がよく使われてきました。

このD値法については，固定法の次に学びます。

剛度，標準剛度，剛比



$K_{AO}=\frac{I}{L}=K_0$ と置くと

	剛比
$K_{AO}=K_0$	$k_{AO}=1$
$K_{BO}=\frac{1}{1.5}K_0$	$k_{BO}=\frac{1}{1.5}$
$K_{CO}=2K_0$	$k_{CO}=2$
$K_{DO}=\frac{1}{1.5}K_0$	$k_{DO}=\frac{1}{1.5}$

K_0 : 標準剛度

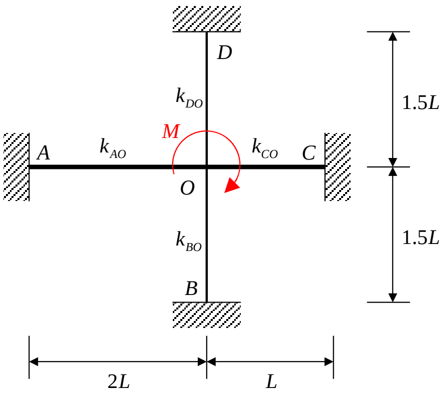
それでは，固定法について，説明していきます。

まず，固定法では，部材（要素）の剛度と剛比の定義を知る必要があります。
要素（部材）の剛度は，要素の断面2次モーメントを要素の長さで割った量です。
また，剛比は，どこかの要素の剛度で，すべての要素の剛度を割った時の比を表します。
（ただし，この割るための剛度は，必ずしもどこかの要素の剛度である必要はありません。）

この割り算で使う，割る方の剛度を標準剛度と呼びます。
すなわち，どこかの要素の剛度を標準剛度として，すべての要素の剛度を標準剛度で割った値が剛比となります。

固定法では，この剛比を使いますので，ここでは剛比の出し方を頭に入れてください。

剛比と材端モーメントの関係



たわみ角法基本式

$$\begin{Bmatrix} M_{AO} \\ M_{OA} \end{Bmatrix} = 2Ek_{AO}K_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_O \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{BO} \\ M_{OB} \end{Bmatrix} = 2Ek_{BO}K_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_O \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{CO} \\ M_{OC} \end{Bmatrix} = 2Ek_{CO}K_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_O \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{DO} \\ M_{OD} \end{Bmatrix} = 2Ek_{DO}K_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_O \end{Bmatrix}$$

節点方程式

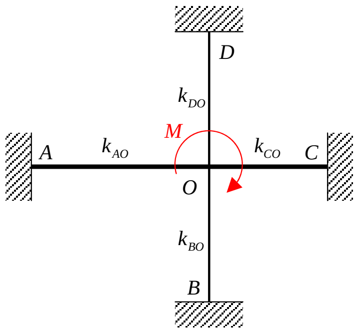
$$M_{OA} + M_{OB} + M_{OC} + M_{OD} = M$$

次に，この剛比と，すべての要素の片側が固定された問題で，中央の節点に加わる外力モーメントが，要素の内力（曲げモーメント）として，どのように伝達されるかを調べてみます。

この問題について，たわみ角法の基本式を立てると，ここに示すようになります。
また，この式では，A,B,C,Dの回転角が固定されている条件を代入しています。

また，O点の節点方程式は，下に示すような式になります。

到達モーメント



$$\begin{Bmatrix} M_{AO} \\ M_{OA} \end{Bmatrix} = 2Ek_{AO}K_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_O \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{BO} \\ M_{OB} \end{Bmatrix} = 2Ek_{BO}K_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_O \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{CO} \\ M_{OC} \end{Bmatrix} = 2Ek_{CO}K_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_O \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{DO} \\ M_{OD} \end{Bmatrix} = 2Ek_{DO}K_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_O \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{OA} &= \boxed{2}k_{AO}\left(2EK_0\theta_O\right) \\ M_{OB} &= \boxed{2}k_{BO}\left(2EK_0\theta_O\right) \\ M_{OC} &= \boxed{2}k_{CO}\left(2EK_0\theta_O\right) \\ M_{OD} &= \boxed{2}k_{DO}\left(2EK_0\theta_O\right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \times\frac{1}{2} \quad \begin{aligned} M_{AO} &= k_{AO}\left(2EK_0\theta_O\right) \\ M_{BO} &= k_{BO}\left(2EK_0\theta_O\right) \\ M_{CO} &= k_{CO}\left(2EK_0\theta_O\right) \\ M_{DO} &= k_{DO}\left(2EK_0\theta_O\right) \end{aligned}$$

材端モーメントは2：1の割合になる。

このたわみ角法の基本式を展開して見ると，固定側の曲げモーメントは，固定されていない側の1/2になっていることがわかります。

このことから，要素の固定端の曲げモーメントは，固定されていない側のモーメントの1/2が伝達されることがわかります。

この固定されている側のモーメントを“到達モーメント”と呼びます。

ここでは，“到達モーメント”という言葉と，固定端のモーメントは固定されていない側のモーメントの1/2になることを憶えてください。

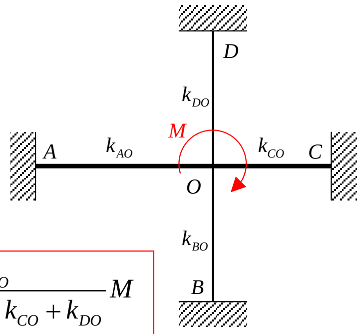
モーメントの分配

節点方程式

$$M_{OA}+M_{OB}+M_{OC}+M_{OD}=M$$

$$M_{OA}=2k_{AO}\left(2EK_0\theta_O\right)$$
$$M_{OB}=2k_{BO}\left(2EK_0\theta_O\right)$$
$$M_{OC}=2k_{CO}\left(2EK_0\theta_O\right)$$
$$M_{OD}=2k_{DO}\left(2EK_0\theta_O\right)$$

$$2\left(2EK_0\theta_O\right)=\frac{M}{k_{AO}+k_{BO}+k_{CO}+k_{DO}}$$



$$M_{OA}=\frac{k_{AO}}{k_{AO}+k_{BO}+k_{CO}+k_{DO}}M$$
$$M_{OB}=\frac{k_{BO}}{k_{AO}+k_{BO}+k_{CO}+k_{DO}}M$$
$$M_{OC}=\frac{k_{CO}}{k_{AO}+k_{BO}+k_{CO}+k_{DO}}M$$
$$M_{OD}=\frac{k_{DO}}{k_{AO}+k_{BO}+k_{CO}+k_{DO}}M$$

モーメントは剛比に比例して分配される。

節点方程式に，要素方程式を代入すると，各要素両端の曲げモーメントを求めることができ，MOA, MOB, MOC, MODはここに示す式のようになります。

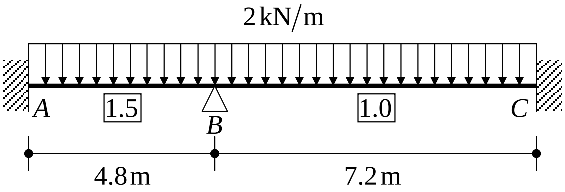
この式からわかることは，節点Oに加わるモーメントは，それぞれの要素の剛比に比例して分配されるということです。

すなわち，より剛な部材が，より大きな力を受け持つということです。

力が剛比によって分配されるということは，実務の設計においても非常に重要な意味を持つので，よく頭に入れておいて下さい。

固定法では，この剛比によるモーメントの分配と，固定端側に1/2のモーメントが伝わる到達モーメントの考え方を用いて問題を解きます。

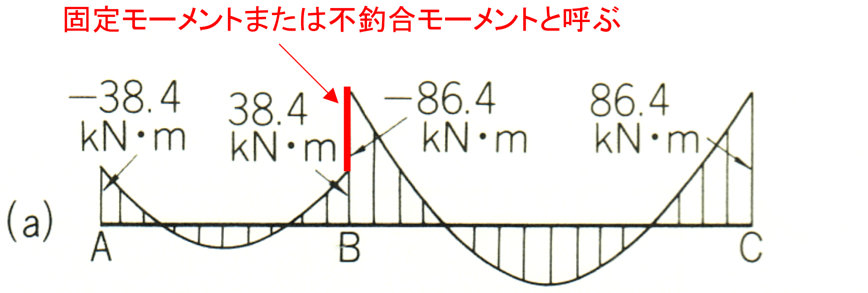
固定モーメント法の例題



まずは，基本的な例題で，固定法の解き方を説明します。

この例題の四角で囲まれる数字は剛比を示しています。

B点で材が回転しないように固定する。



B点を固定したときの曲げモーメント図
固定モーメント＝(−86.4＋38.4)＝−48 kN・m

まず，各要素では，要素内に荷重が加わっているため，要素両端の固定端モーメントが計算できます。

固定端モーメントは，たわみ角法の時に勉強したように，要素両端の回転角を0にした（回転を固定した）場合の曲げモーメントになります。

固定法では，このように，まず，中間に荷重がある要素を見つけて，その要素の固定端モーメントを計算します。

この例題の場合，固定端モーメントは，-wL^2/12と，wL^2/12になります。

これから求められる曲げモーメント図を描くとここに示す図のようになります。

この時，B点では，曲げモーメントの差が生じます。

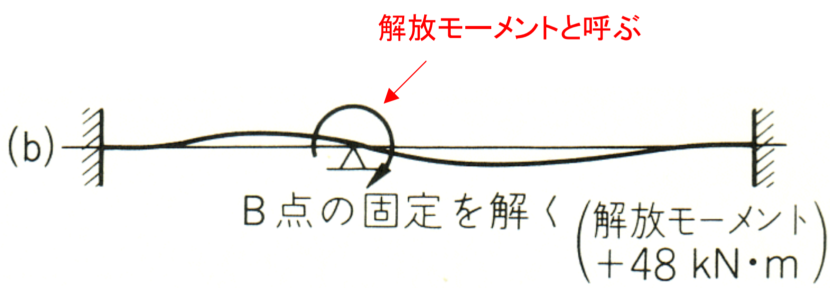
B点には，外力モーメントは作用していませんから，B点に作用するモーメントを加えると0にならなければなりません。

しかしながら，この場合は，-48kNの差が生じ，これを固定モーメントまたは不釣合モーメントと呼びます。

固定モーメントは，節点の回転を固定した場合に現れる不釣合モーメントという意味でそう呼ばれるのだと考えられます。

この固定モーメントが0になれば，正解の曲げモーメントとなります。

固定モーメントと大きさが等しく，逆符号のモーメントをB点に加える。



このモーメントは，左右の梁の剛比の割合で分配される。これを分配モーメントといい，ここではD_1で表す。

固定法では，この固定モーメントを小さくするために，固定モーメントが生じている節点に，固定モーメントと大きさが等しく逆符号のモーメントを加えます。

このモーメントを固定モーメントに対して解放モーメントと呼びます。

この例題では，解放モーメントは+48kNとなります。

この解放モーメントは，先に示したように，左右の部材（要素）の剛比の割合で分配されます。

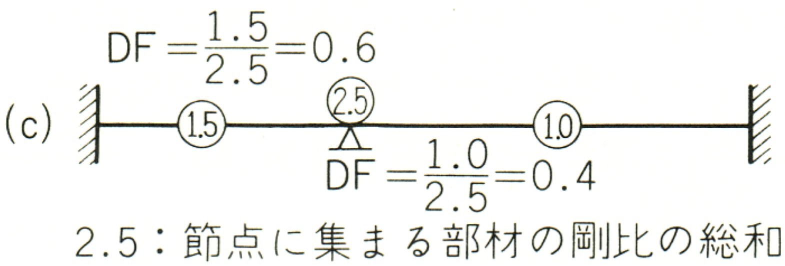
固定法では，この分配されたモーメントを“分配モーメント”と呼び，記号D1で表します。

なお，記号D1の1は，1回目の分配であることを示します。

分配モーメント

$$M_{BA} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} M = D_1 = (\mathrm{DF}_{BA}) \times M$$

$$M_{BC} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} M = D_1 = (\mathrm{DF}_{BC}) \times M$$



まず，剛比による分配率DFを計算します。

これは，BA, BC部材の剛比をBA, BC部材の総剛比で割ることによって求めることができます。

これにより，解放モーメントのBA部材への分配モーメントはM×0.6，BC部材への分配モーメントはM×0.4になります。

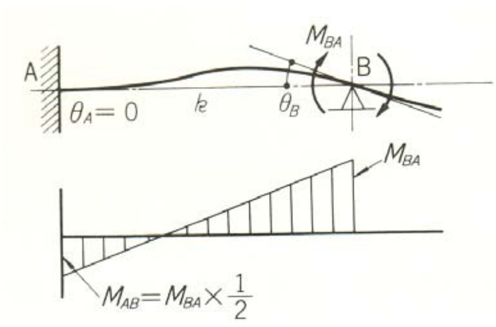
ここでは，この分配率DFの計算法をよく憶えてください。

到達モーメント

各材の他端には，分配モーメント×1/2のモーメントが生じる。これを到達モーメントといい，ここではC_1で表す。

たわみ角法より

$$M_{AB}=\frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{k_1+k_2}M\right)$$
$$M_{CB}=\frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}M\right)$$

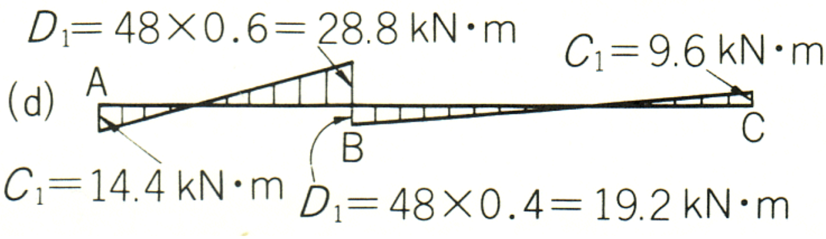


次に，各要素に分配された分配モーメントは，固定端側に1/2で伝わるということを利用して，要素他端への到達モーメントを計算します。

この問題では，MABが，MBAの1/2，MCBがMBCの1/2になります。

固定法では，この到達モーメントをC1という記号で表します。C1の1は1回目の到達モーメントであることを表します。

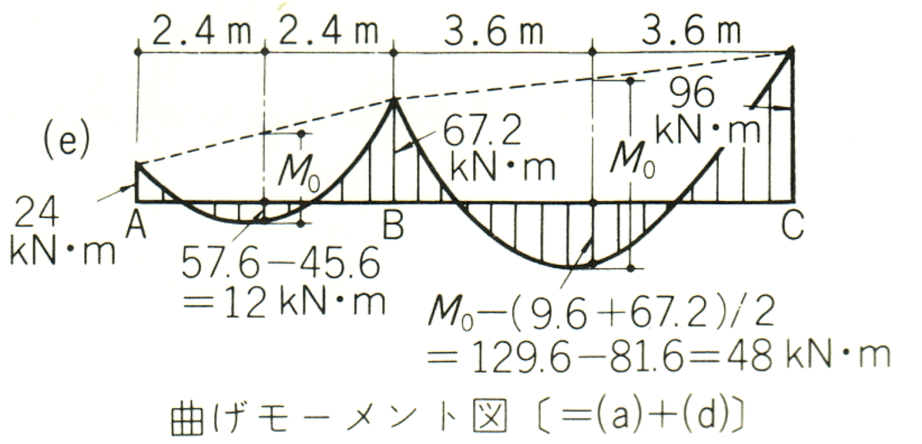
分配モーメントと到達モーメント



以上により求められた解放モーメントによる曲げモーメント図を描くとこの図のようになります。

MBAとMBCが分配モーメント，MABとMCBが到達モーメントです。

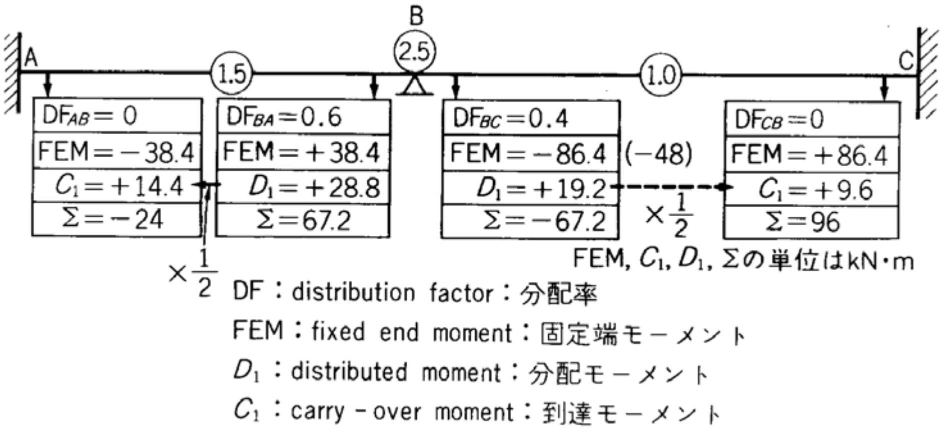
(a)と(d)を合わせることにより



以上で求められた解放モーメントによる曲げモーメント図と，最初の固定端モーメントの図を重ね合わせると，図のような曲げモーメント図が得られます。

この場合は，これによりB点の不釣合力が0になり，これが正解の曲げモーメント図となります。

固定法による図上での書き方



固定法では，以上のような計算を図に示すような表を用いて計算します。

手順としては，まず，各節点に注目して，その節点につながる部材の剛比による分配率(DF)を計算します。
ただし，回転が固定されている節点では，解放モーメントを与えることはないため，部材の回転固定側の分配率は0にしておきます。

次に，中間に荷重が加わっている部材（要素）の固定端モーメントを計算して記入します。
この固定端モーメントは，英語でfixed end momentと訳せるのでFEMという記号を用います。

次に，固定端以外の節点に関して，固定モーメント(不釣合モーメント)を計算します。
この場合は，－48kNとなります。
次に，固定モーメントの符号を逆にして，解放モーメントをかけ，分配モーメント(D1)を計算します。
次に，この分配モーメントから他端への到達モーメント(C1)を求めます。

最後に，FEM以下の行の総和(Σ)を計算します。これが正解の曲げモーメントとなります。

この場合は，1回の分配で正解が求まりましたが，一般には，この操作を数回繰り返すことにより正解に近い近似解を求めることができます。

解法の手順

1. 回転角を生じる各節点における分配率（DF: Distribution Factor）を求める。
2. 中間荷重の作用する部材において固定端モーメント（FEM: Fixed End Moment）を求める。
3. 各節点における第1次の固定モーメント（M_1）を求める。
4. 各節点に第1次の解放モーメント（$-M_1$）を作用させて分配モーメント（D_1）および到達モーメント（C_1）を求める。
5. 各節点における第2次の固定モーメント（M_2）を到達モーメント（C_1）を総和して求める。
6. 各節点に第2次の解放モーメント（$-M_2$）を作用させて分配モーメント（D_2）および到達モーメント（C_2）を求める。

繰り返し計算

以上の手順をまとめるとここに示すようになります。

先の例題では，4から10に飛んでいましたが，一般には，解放モーメントで不釣合力が消えても，他端からの到達モーメントによって新たな不釣り合い力が生じます。

したがって，5番目では，固定端を除く各節点で，到達モーメント（C1）の差を計算して，固定モーメント（不釣合モーメント）を計算します。

そして，この固定モーメントを新たな解放モーメントとして加え，分配モーメントおよび到達モーメントを求めます。

解法の手順

7. 各節点における第n次の固定モーメント(M_n)を到達モーメント(C_{n-1})を総和して求める。
8. 各節点に第n次の解放モーメント($-M_n$)を作用させて分配モーメント(D_n)を求める。
9. 固定端に到達モーメント(C_n)を伝達させる。
10. 次式で材端モーメントを計算する。

$$M = FEM + D_1 + C_1 + D_2 + C_2 + \cdots + D_n$$

実用的な解を求める場合には，n=2程度でよい場合が多い

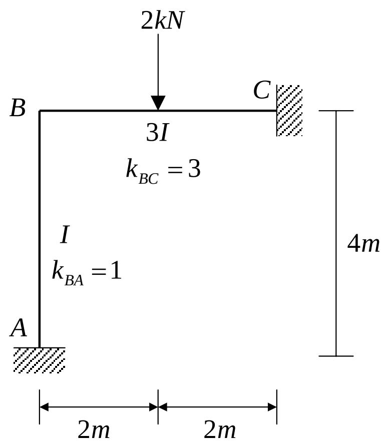
以上の5，6の操作をn回繰り返して，n次の分配モーメントを求め，固定端以外の節点では，ここで止めます。

最後に，固定端のみに到達モーメントを記入します。

そして，FEM以下の行の値の総和を求め，要素材端の曲げモーメントを計算します。

一般に固定法の収束は速く，n=2程度で実用的な解が求まります。

例題



分配率(DF)

$$D_{BA} = \frac{k_{BA}}{k_{BA}+k_{BC}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$D_{BC} = \frac{k_{BC}}{k_{BA}+k_{BC}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

固定端モーメント(FEM)

$$C_{BC} = -\frac{Pl}{8} = -\frac{2\times 4}{8} = -1$$

$$C_{CB} = \frac{Pl}{8} = \frac{2\times 4}{8} = 1$$

それでは，次に，演習問題に近い例題で，具体的な解き方を説明します。

まず，表計算に入る前に，各部材(要素)の剛比と，剛比による分配率を計算します。
また，BC要素に関しては，中間荷重があるため，固定端モーメントを計算します。

Step1 枠と記号を書く

B　　　　C

	(BA)	(BC)	M
DF			
FEM			
D1			
C1			
D2			
Σ			

	(CB)
FEM	
C1	
C2	
Σ	

A

	(AB)
FEM	
C1	
C2	
Σ	

次に，図のような表を作成します。
演習問題では，すでにこのような枠が書かれています。

ここで，固定節点C, Bでは，解放モーメントの分配は生じないため，分配率および分配モーメントD1，D2の表記は省略してあります。

Step2 分配率(DF)の記入

B　　　C

	(BA)	(BC)	M
DF	0.25	0.75	
FEM			
D1			
C1			
D2			
Σ			

	(CB)
FEM	
C1	
C2	
Σ	

A

	(AB)
FEM	
C1	
C2	
Σ	

まず，節点Bの分配率を記入します。

Step3 固定モーメント（FEM）の記入

B C

	(BA)	(BC)	M
DF	0.25	0.75	
FEM	0	-1	
D1			
C1			
D2			
Σ			

	(CB)
FEM	1
C1	
C2	
Σ	

A

	(AB)
FEM	0
C1	
C2	
Σ	

次に，要素BCの固定端モーメント（FEM）の値を記入します。
また，要素ABには固定端モーメントは生じないので0を記入します。

Step4　不釣合いモーメント(M)の計算

B　C

	(BA)	(BC)	M
DF	0.25	0.75	
FEM	0 ＋	-1 ＝	-1
D1			
C1			
D2			
Σ			

A

	(AB)
FEM	0
C1	
C2	
Σ	

	(CB)
FEM	1
C1	
C2	
Σ	

次に，節点Bの固定モーメント(不釣合モーメント)を求めます。
これは，MBA＋MBCによって計算されます。

Step5　不釣合いモーメント(M)の符号を逆にしたものに分配率を掛けて，第1次の分配モーメント(D1)を計算

B　　C

	(BA)	(BC)	M
DF	0.25	0.75	
FEM	0	-1	-1(×-1)
D1	0.25	0.75	
C1			
D2			
Σ			

	(CB)
FEM	1
C1	
C2	
Σ	

A

	(AB)
FEM	0
C1	
C2	
Σ	

次に，固定モーメントの符号を逆にして，解放モーメントとし，この解放モーメントに分配率(DF)を掛けることにより，分配モーメントD1を求めます。

Step6 第1次の到達モーメント(C1)の計算

B　　　　　　　　C

	(BA)	(BC)	M
DF	0.25	0.75	
FEM	0	-1	-1
D1	0.25	0.75	
C1	0	0	
D2			
Σ			

	(CB)
FEM	1
C1	0.375
C2	
Σ	

A

	(AB)
FEM	0
C1	0.125
C2	
Σ	

次に，この分配モーメントから，到達モーメントを求めます。

また，この問題では，A点およびC点からの到達モーメントはないため，BAとBCの到達モーメントは0になります。

ここで，BAの分配モーメントはABの到達モーメントに，BCの分配モーメントはCBの到達モーメントになることに注意してください。

記入する欄を勘違いする人がよくいます。

Step7　第2次の固定モーメントの計算

B　　C

	(BA)	(BC)	M
DF	0.25	0.75	
FEM	0	-1	-1
D1	0.25	0.75	
C1	0 +	0 =	0
D2			
Σ			

	(CB)
FEM	1
C1	0.375
C2	
Σ	

A

	(AB)
FEM	0
C1	0.125
C2	
Σ	

次に第2次の固定モーメント(不釣合モーメント)を計算します。

この問題では，B点に到達モーメントが生じないため，第2次の固定モーメントは0になります。

Step8　第2次の分配モーメントの計算

B　C

	(BA)	(BC)	M
DF	0.25	0.75	
FEM	0	-1	-1
D1	0.25	0.75	
C1	0	0	0
D2	0	0	
Σ			

	(CB)
FEM	1
C1	0.375
C2	
Σ	

A

	(AB)
FEM	0
C1	0.125
C2	
Σ	

第2次の解放モーメントに分配率を掛けることにより，第2次の分配モーメントを求めます。

Step9　第2次の到達モーメントの計算

B　C

	(BA)	(BC)	M
DF	0.25	0.75	
FEM	0	-1	-1
D1	0.25	0.75	
C1	0	0	0
D2	0	0	
Σ			

	(CB)
FEM	1
C1	0.375
C2	0
Σ	

A

	(AB)
FEM	0
C1	0.125
C2	0
Σ	

これから第2次の到達モーメントを求めます。
これで終了です。

ここで，固定端以外の節点Bでは，分配モーメントD2で終わっていることに注意して下さい。

Step10 曲げモーメントの総和(Σ)の計算

B　　C

	(BA)	(BC)	M
DF	0.25	0.75	
FEM	0	-1	-1
D1	0.25	0.75	
C1	0	0	0
D2	0	0	
Σ	0.25	-0.25	

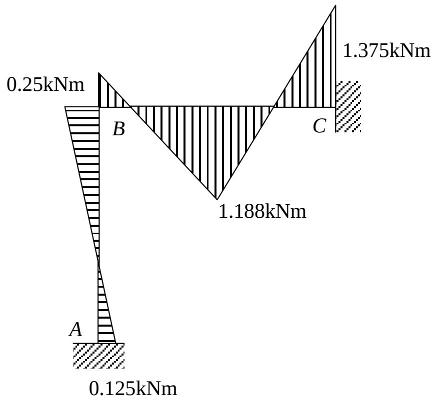
	(CB)
FEM	1
C1	0.375
C2	0
Σ	1.375

A

	(AB)
FEM	0
C1	0.125
C2	0
Σ	0.125

最後に，FEM以下の行をすべて加えます。
こうして得られたモーメントが，最終的な要素端の曲げモーメントになります。

Step11　曲げモーメント図を描く



後は，得られた要素端の曲げモーメントをもとに，曲げモーメント図を描けば，この図のようになります。